لتكن S مجموعة كل الدوال المستمرة ذات المتغيرين x, y والمعرفة على المربع $0 \le x \le a$ ، $0 \le y \le a$ ولنعرف العملية على S بالشكل

$$\forall f_1(x,y), f_2(x,y) \in S \; ; \; f_1(x,y) * f_2(x,y) = \int_0^a f_1(x,t)\, f_2(t,y)\, dt$$

بين أن $(S, *)$ شبه زمرة

مثال: إذا كانت $f_3(x,y) = x - 2y$ ، $f_2(x,y) = xy$ ، $f_1(x,y) = x + y$

نبين أن

$$f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3$$

$$f_2 * f_3 = \int_0^a xt(t-2y)\,dt = \int_0^a (xt^2 - 2xyt)\,dt = \left[\frac{xt^3}{3} - xyt^2\right]_0^a$$

$$= \frac{a^3 x}{3} - axy$$

$$f_1 * (f_2 * f_3) = \int_0^a (x+t)\left(\frac{a^3 t}{3} - a^2 t y\right) dt$$

$$= \int_0^a \left(\frac{a^3 x t}{3} - a^2 x y t + \frac{a^3 t^2}{3} - a^2 t^2 y\right) dt$$

$$= \left[\frac{a^3 x t}{6} - \frac{a^2 x y t^2}{2} + \frac{a^3 t^3}{9} - \frac{a^2 t^3}{3}\right]_0^a$$

$$= \boxed{\frac{a^5 x}{6} - \frac{a^4 x y}{2} + \frac{a^6}{9} - \frac{a^5 y}{3}}$$

$$f_1 * f_2 = \int_0^a (x+t)\, t y\, dt = \int_0^a (xyt + yt^2)\, dt$$

$$= \left[\frac{xyt^2}{2} + \frac{yt^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^2 x y}{2} + \frac{a^3 y}{3}$$

$$(f_1 * f_2) * f_3 = \int_0^a \left(\frac{a^2 x t}{2} + \frac{a^3 t}{3}\right)(t - 2y)\, dt$$

$$= \int_0^a \left(\frac{a^2 x t}{2} - a^2 x y t + \frac{a^3 t^2}{3} - \frac{2a^3 y t}{3}\right) dt$$

$$= \left[\frac{a^2 x t}{6} - \frac{a^2 x y t}{2} + \frac{a^3 t^3}{9} - \frac{a^3 y t^2}{3} \right]_0^a$$

$$= \frac{a^5 x}{6} - \frac{a^4 x y}{2} + \frac{a^6}{9} - \frac{a^5 y}{3}$$

مبرهنة

إذا كان S نصف زمرة ذات صفر فإن S هي زمرة مع الصفر إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall a \in S - \{0\} ;\ aS = Sa = S$$

البرهان

نفرض أن S زمرة مع الصفر ولنفرض أن $G = S - \{0\}$ فإن G تكون زمرة :

$\forall a \in G ;\ aG = Ga = G \Rightarrow aG \cup \{0\} = Ga \cup \{0\} = G \cup \{0\}$

$\Leftarrow\ aG \cup \{0\} = Ga \cup \{0\} = G \cup \{0\}$

$\Leftarrow\ \forall a (G \cup \{0\}) = (G \cup \{0\}) a = G \cup \{0\}$ $\quad \forall a \in G$

$\Leftarrow$ (ولكن $G = S - \{0\}$ نضيف $\{0\}$) $\Leftarrow\ aS = Sa$

العكس : نفرض أن الشرط متحقق $(\forall a \in S - \{0\})\ (aS = Sa = S$

نفرض أن $G = S - \{0\}$ مجموعة جزئية من S فإن $G \neq \phi$ لأن $|S| > 1$

(لأنه لو كانت خلاف ذلك فإن الشرط $\forall a \in S - \{0\}$ تتحقق هنا)

ليكن $a, b \in G$ عنصرين ما فإن $a, b \in G$ (لأنه لو كانت خلاف ذلك فإن

$a, b \notin G$ ولكن $a, b \in S$ ومنه $ab = 0$ (تناقض إذ أن S تحتوي على قواسم الصفر)

(وبما أن $G \not\ni$ هنا $G = S - \{0\} \Leftarrow$ الشرط هنا بالصفر)

مثال

$sb = bs = s$
$as = sa = s$

$$s^2 = ss = sabs = s0s = \{0\}$$

$$s = as \subseteq s^2 = \{0\} \Rightarrow s = \{0\}$$

ومنها نستنتج من (15.17) مثال فإن G مغلقة بالنسبة للضرب أي وحدانية لكل $a \in G$

فإن $aG \subseteq G$ و $Ga \subseteq G$

لنوضح الآن أن $aG = G$ إذا لم يكن $(aG \neq G)$ فإن $aG \subset G$ أي أن

($aG \subset G \Leftarrow aG \neq G$ لكن $aG \subseteq G$

وبالتالي فإن $aS = a(G \cup \{0\})$

$= aG \cup \{0\} \subset G \cup \{0\} = S$

$\Rightarrow aS \subset S \Rightarrow aS \neq S$

وهذا تناقض للفرض

$\Rightarrow aG = G$ ومنه فإن $\forall a \in G : aG = Ga = G$

$\Rightarrow G$ زمرة $\Rightarrow G^0 = S$ هو زمرة مع الصفر

نصف الزمرة الجزئية :

تعريف :

إذا كانت $(S, *)$ نصف زمرة فإن المجموعة الجزئية غير الخالية T من S تدعى نصف الزمرة الجزئية من S إذا كانت مغلقة بالنسبة للعملية $*$ أي إذا تحقق الشرط :

$\forall x, y \in T \Rightarrow x * y \in T$

يمكن التعبير عن هذا الشرط باستخدام جداء مجموعتين فنقول إن T نصف زمرة جزئية من S إذا كان $T^2 \subset T$

نلاحظ أن S تعتبر هي نصف زمرة جزئية من S كما أن $\{e\}$ و $\{0\}$ هما نصفا زمرتين جزئيتين من S إذا وجد عنصر ماص وعنصر حيادي

تعريف :

إن العنصر a من نصف الزمرة S يدعى عنصر جامد (أو خامل) إذا كان $a^2 = a$ كما أن نصف الزمرة التي جميع عناصرها جامدة تدعى نصف زمرة جامدة (أو حزمة).

بما أن كل من العنصر الماص والعنصر الحيادي هو عنصر جامد ولكن العكس ليس صحيحاً في الحالة العامة

ملاحظة :

إذا كانت T مجموعة غير خالية من نصف زمرة S فإن T تكون نصف زمرة جزئية من S إذا وفقط إذا تحقق الشرط

$\forall a \in T \quad aT = Ta = T$

البرهان

لنفرض الشرط محقق ولنبرهن أن T زمرة جزئية من G وبالتالي من الشرط

$$\forall a \in T \qquad aT = T$$

يعني أن T مغلقة بالنسبة لعملية الضرب وبالتالي فهي نصف زمرة جزئية من G أي أنها نصف زمرة تحقق الشرط وبالتالي حسب الملاحظة السابقة تكون T زمرة وبالتالي زمرة جزئية من G

والعكس: لنفرض أن T زمرة ⇐

$$\begin{cases} \forall a \in T \; ; \; aT \subseteq T \\ \forall x \in T \Rightarrow x = ex = a a^{-1} x \in aT \Rightarrow T \subseteq aT \end{cases}$$

⇐ $T = aT$ وبنفس الطريقة نبرهن أن

$$Ta = T$$